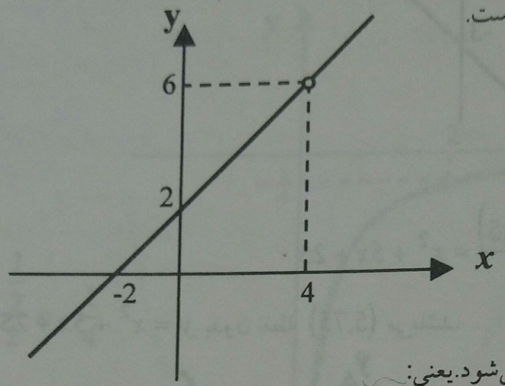
❖ با استفاده از استدلالی همانند در مثال ۱ ،حدود زیر را محاسبه نمایید.

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$

حل: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-4)}=(x+2)$, اگر $x\neq 4$

نمودار خط $y=x+2$ می‌باشد بدون نقطهٔ $(4,6)$ است.



اگر x به 4 نزدیک شود پس $f(x)$ به 6 نزدیک می‌شود.یعنی:

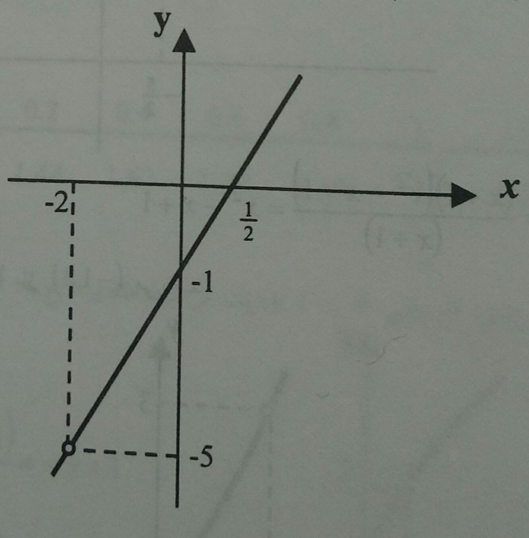
$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{x-4}=6$$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

حل: $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}=\dfrac{(x+2)(2x-1)}{x+2}=2x-1$

نمودار خط $y=2x-1$ بدون نقطهٔ $(-2,-5)$ است.

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2}=-5$$

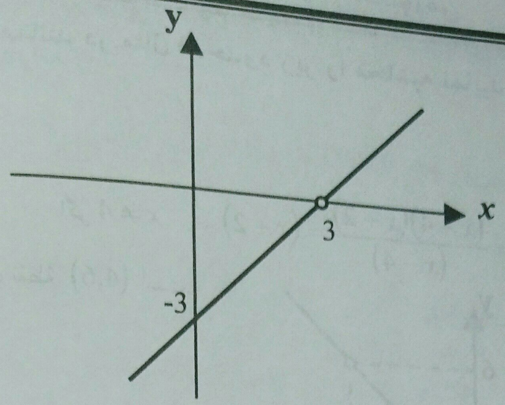


3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

حل: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}=\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)}=x-3$

نمودار خط $y=x-3$ بدون نقطهٔ $(3,0)$ می‌باشد

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=0$$

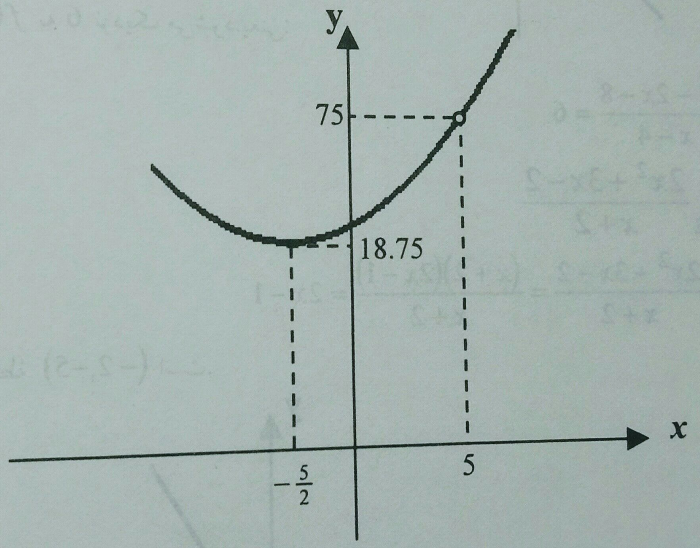


$$4)\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x-5}$$

حل:

$$f(x)=\frac{x^3-125}{x-5}=\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{x-5}=x^2+5x+25$$

نمودار منحنی $y=x^2+5x+25$ بدون نقطهٔ $(5,75)$ می‌باشد.



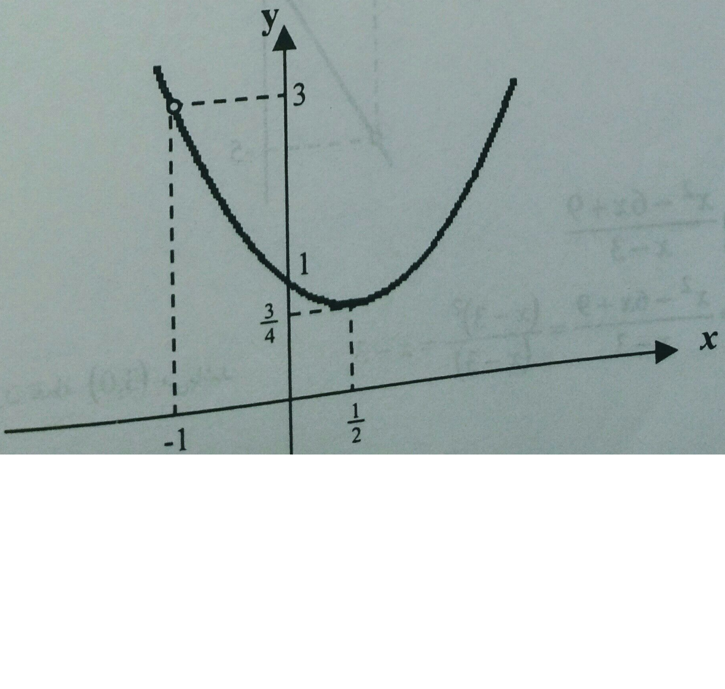
$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x-5}=75$$

$$5)\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

حل:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}=x^2-x+1$$

نمودار منحنی $y=x^2-x+1$ بدون نقطهٔ باز $(-1,3)$ می‌باشد.

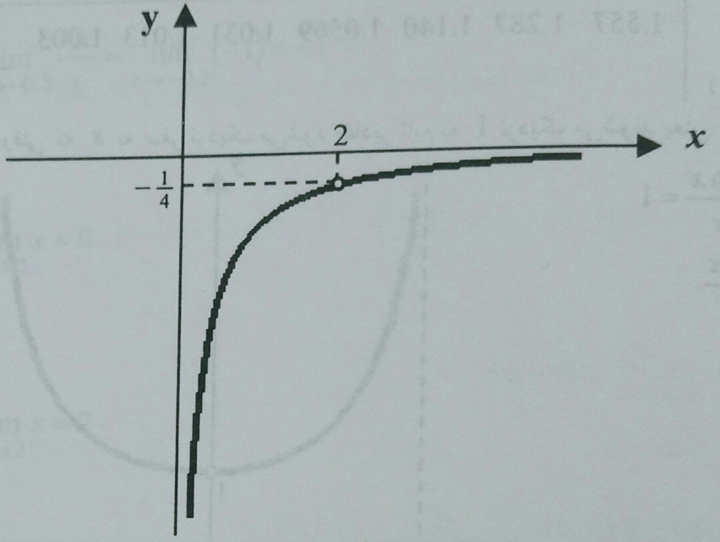


$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=3$$

$$6) \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$$

حل: نمودار منحنی $y=-\frac{1}{2x}$ بدون نقطهٔ $\left(2,-\frac{1}{4}\right)$ می‌باشد.

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=-\frac{\frac{x-2}{2x}}{x-2}=-\frac{1}{2x}$$



$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=-\frac{1}{4}$$

7)با ساختن جدولی از مقادیر تابع $f(x)=(x-1)/(\sqrt{x}-1)$ نزدیک $x=1$ ،متقاعد شوید که وقتی $x\to 1$ ،تابع به حدی نزدیک میشود.این حد چقدر است؟همین نتیجه را بهطور جبری ثابت کنید.تابع را در مجاورت $x=1$ رسم کنید.

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

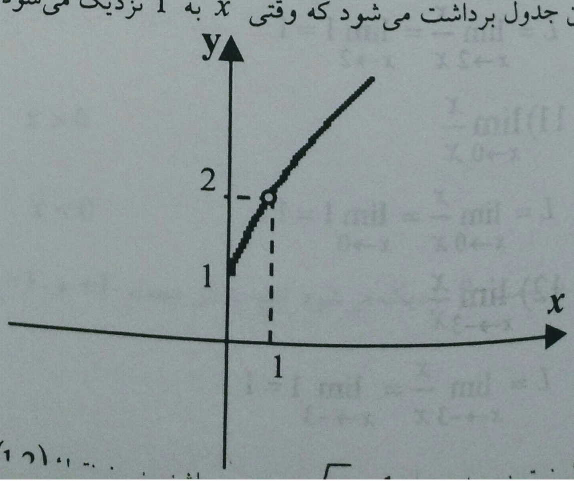
حل:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.1	1.2
$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$	1	1.44	1.63	1.77	1.89	تعریف نشده است	2.04	2.09

از این جدول برداشت می‌شود که وقتی x به 1 نزدیک می‌شود مقادیر تابع به 1 نزدیک می‌شوند یعنی:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=1$$

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$$



8) با ساختن جدولی از مقادیر تابع $f(x)=\tan x/x$ نزدیک x، متقاعد شوید کـه وقتـی $x\to 0$ تابع به حدی نزدیک میشود. این حد چقدر است؟ تابع را در مجاورت $x=0$ رسم کنید.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

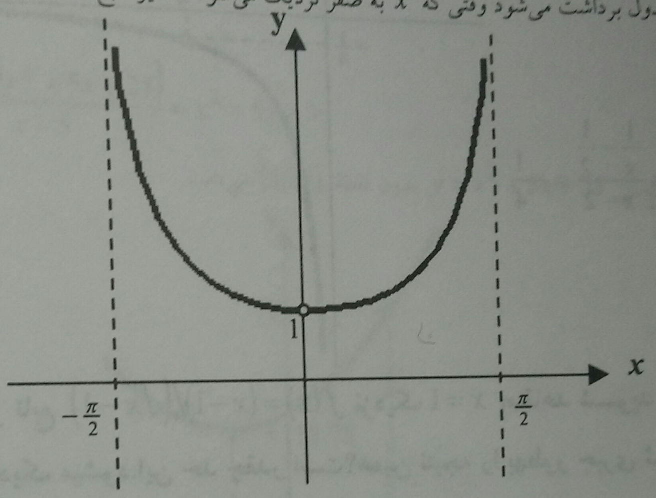
حل:

x	1	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0	−0.1	−0.2
$f(x)=\frac{\tan x}{x}$ (x برحسب رادیان است)	1.557	1.287	1.140	1.0569	1.031	1.013	1.003	تعریف نشده است	1.003	1.013

از این جدول برداشت می‌شود وقتی که x به صفر نزدیک می‌شود مقادیر تابع به 1 نزدیک می‌شوند یعنی:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$f(x)=\frac{\tan x}{x}$$



❖ حدود زیر را با استفادهٔ غیر صوری محاسبه کنید.

9) $\lim_{x\to 0}|x|$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

10) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$

حل:

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 2}1=1$$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

12) $\lim_{x\to -3}\frac{x}{x}$

حل:

$$L=\lim_{x\to -3}\frac{x}{x}=\lim_{x\to -3}1=1$$

13) $\lim\limits_{x\to 0.1} \dfrac{|x|}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0.1} \dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0.1} \dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0.1} 1=1$

14) $\lim\limits_{x\to -0.2} \dfrac{|x|}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to -0.2} =\lim\limits_{x\to -0.2} \dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to -0.2} (-1)=-1$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x=0$

16) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{2}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{2}=\lim\limits_{x\to 2} x=2$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}=\begin{cases} L_1=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x}=1 & x>0 \\ L_2=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{x}=-1 & x<0 \end{cases}$

وقتی x به سمت 0 نزدیک می‌شود تابع به سمت $1+$ و $1-$ نزدیک می‌شود پس در این نقطه حد وجود ندارد.

18) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to -2} (-1)=-1$

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}=\begin{cases} L_1=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1 & x>0 \\ L_2=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{-x}=-1 & x<0 \end{cases}$

وقتی x به سمت 0 نزدیک می‌شود تابع به دو سمت $1+$ و $1-$ نزدیک می‌شود پس در این نقطه حد وجود ندارد.

$$20)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}=\begin{cases}L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 & x>0\\ L_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{x}=-1 & x<0\end{cases}$$

وقتی x به سمت 0 نزدیک می‌شود تابع به دو سمت دو مقدار نزدیک می‌شود پس تابع در این نقطه حد ندارد.

❖ **حدود زیر را با استفاده از پیوستگی چند جمله‌ایها محاسبه کنید.**

$$21)\ \lim_{x\to -3}\left(x^2+3x+4\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -3}\left(x^2+3x+4\right)\ \Rightarrow\ L=\lim_{x\to -3}\left((-3)^2+3(-3)+4\right)=4$$

$$22)\ \lim_{x\to 4}\left(x^3+1\right)$$

حل:

$$\lim_{x\to 4}\left(x^3+1\right)=\lim_{x\to 4}\left(4^3+1\right)=65$$

$$23)\ \lim_{x\to 3}\left(x^4-9x-6\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 3}\left(x^4-9x-6\right)=\lim_{x\to 3}\left(3^4-9\times 3-6\right)=48$$

$$24)\ \lim_{x\to -2}\left(x^5+5x^2\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -2}\left(x^5+5x^2\right)=\lim_{x\to -2}\left((-2)^5+5(-2)^2\right)=-12$$

$$25)\ \lim_{x\to 1}\left(2x^6-3x^5+x^4\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 1}\left(2x^6-3x^5+x^4\right)=\lim_{x\to 1}\left(2-3+1\right)=0$$

$$26)\ \lim_{x\to -1}\left(x^{11}-x^7+2\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -1}\left(x^{11}-x^7+2\right)=\lim_{x\to -1}\left((-1)^{11}-(-1)^7+2\right)=2$$

❖ **حدود زیر را با استفاده از پیوستگی توابع مثلثاتی محاسبه کنید**

$$27)\ \lim_{x\to 1}\sin x$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 1}\sin x=\lim_{x\to 1}\sin 1=0.841$$

$$28)\ \lim_{x\to \pi}\cos x$$

حل:

$$L=\lim_{x\to \pi}\cos x=\lim_{x\to \pi}\cos\pi=-1$$

29) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \tan x$

حل: $L = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \tan x = -1$

30) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cot x$

حل: $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cot x = 0$

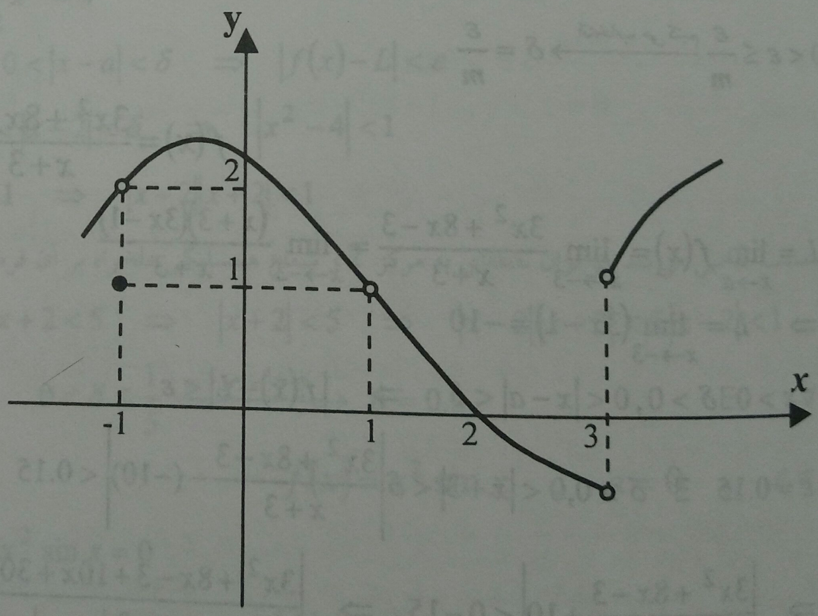
31) $\lim_{x \to 0} \sec x$

حل: $L = \lim_{x \to 0} \sec x = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

32) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \csc x$

حل: $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \csc x = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

❖ **شکل ۳۱ نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حدود زیر را بیابید.**



33) $\lim_{x \to -1} f(x)$

حل: $L = \lim_{x \to -1} f(x) = 2$

34) $\lim_{x \to 1} f(x)$

حل: $L = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

35) $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$

حل: $L = \lim_{x \to 2} f(x) = 0$

36) $\lim_{x \to 3} f(x)$

حل: $L = \lim_{x \to 3} f(x)$

وقتی x از دو طرف به 3 نزدیک می‌شود $f(x)$ دو مقدار غیریکسان پیدا می‌کند پس تابع در این نقطه حد ندارد.

37) **تابع شکل ۳۱ درکدام نقاط 3 و 2 و $x = \pm 1$ پیوسته است؟**

حل: با توجه به شکل، تابع فقط در $x = 2$ پیوسته است.

$f(x)$ در $x=0$ حد دارد

$f(x)=\cos x \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

$g(x)=x \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$L=\lim\limits_{x\to 0} x\cos x = 0$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$

حل: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x} =$ حد ندارد

17) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x}$

حل:

$f(x)=\dfrac{1}{x} \quad , \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

$g(x)=\cos x \quad , \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} cox = 0$

طبق قضیهٔ (۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x}=0$

18) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$

حل: $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$

چون به ازای هر $x\neq 0$ ؛ $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leq 1$ پس $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ دارای حد کراندار است و $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ سپس طبق قضیهٔ (۳) داریم:

$\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}=0$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=$ حد وجود ندارد

20) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos x$

حل:

$f(x)=\cos x \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

$g(x)=\sin x \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$

$\xrightarrow{\text{طبق قضیهٔ ۳}} \lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos x = 0$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}$

حل: به ازای هر $x\neq 0$ $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq 1$ و چون $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ لذا از قضیهٔ (۳) نتیجه می‌شود:

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}=0$

22) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$

حل:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}= \text{حد ندارد}$$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\tan x$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$g(x)=\sin^2 x \quad , \quad \lim_{x\to 0}\sin^2 x=0 \quad \xrightarrow{\text{طبق قضیهٔ ۳}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x}=0$$

$$f(x)=\frac{1}{\cos x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

24) $\lim\limits_{x\to 0}\sin^n x$ **n عدد صحیح دلخواهی است**

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\sin^{n-1}x$$

$$f(x)=\sin^{n-1}x \quad , \quad \lim_{x\to 0}\sin^{n-1}x=0 \quad \xrightarrow{\text{طبق قضیهٔ ۳}} \lim_{x\to 0}\sin^n x=0$$

$$g(x)=\sin x \quad , \quad \lim_{x\to 0}\sin x=0$$

❖ **نشان دهید:**

25) هرگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$.

حل:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ ,\ 0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

داریم:

$$\big||a|-|b|\big|\le|a-b| \quad\Rightarrow\quad \big||f(x)|-|L|\big|\le|f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ ,\ 0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad \big||f(x)|-|L|\big|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$$

26) هرگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$.

حل:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=0$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ ,\ 0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad \big||f(x)|-0\big|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \big||f(x)|\big|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ ,\ 0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-0|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to a}f(x)=0$$

❖ حدود زیر را حساب کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 1.6}\frac{25x^2-64}{5x-8}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 1.6}\frac{25x^2-64}{5x-8}=\lim_{x\to 1.6}\frac{(5x-8)(5x+8)}{5x-8}=\lim_{x\to 1.6}(5x+8)$$
$$=(5\times 1.6+8)=16$$

$$2)\ \lim_{x\to -0.3}\frac{100x^2-9}{10x+3}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -0.3}\frac{100x^2-9}{10x+3}=\lim_{x\to -0.3}\frac{(10x+3)(10x-3)}{10x+3}$$
$$=\lim_{x\to -0.3}(10x+3)=10(-0.3)-3=-6$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-1}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-1}=\frac{(0)^2-2(0)+3}{(0)^2+2(0)-1}=\frac{3}{-1}=-3$$

$$4)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x-1)(x-5)}{(3x+1)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{2(5)-1}{3(5)+1}=\frac{9}{16}$$

$$5)\ \lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$$

حل:

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x^2-4x+16)}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x^2-4x+16)$$
$$=(-4)^2-4(-4)+16=48$$

$$6)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(x^2+9)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+3)(x^2+9)=(3+3)(3^2+9)=108$$

$$7)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-4)}{(x^2-4)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)-1}{x}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2x+x+2x^2-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(2x+3)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(2x+3) = 2(0)+3 = 3$$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^3-11x^2+6x+1-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(6x^2+11x+6\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(6x^2+11x+6\right) = 6(0)^2+11(0)+6 = 6$$

10) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{100}-1-x^{10}+999}{x^{50}-5x^5+99}$

حل:

$$L = \lim_{x\to -1}\frac{x^{100}-1-x^{10}+999}{x^{50}-5x^5+99} = \frac{(-1)^{100}-10(-1)^{10}+999}{(-1)^{50}-5(-1)^5+99} = \frac{1-10+999}{1+5+99} = \frac{66}{7}$$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x-1+5x}{x^2+x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(x^3+5x^2+15x+10\right)}{x^2\left(1+x^3\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+x^3}$$

$$= \frac{(0)^3+5(0)^2+10(0)+10}{1+(0)^3} = 10$$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(81x^4+108x^3+54x^2+12x+1\right)-\left(1+48x^2+12x+64x^3\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(81x^2+44x+6\right) = 6$$

مسائل صفحه ۱۳۹

13) حد L تابع $f(x)=(x+1)/(x-2)$ در $x=5$ را بیابید. سپس، به‌ازای $\varepsilon>0$ داده‌شده، $\delta>0$ای بیابید به‌طوری که $0<|x-5|<\delta$ ایجاب کند که $|f(x)-L|<\varepsilon$.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-2}=\frac{5+1}{5-2}=\frac{6}{3}=2$$

حل:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,0<|x-5|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x-2}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x+1-2x+4}{x-2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-x+5}{x-2}\right|<\varepsilon$$

چون x به سمت 5 میل می کند می‌توان نقطه‌ای به مرکز 5 و شعاع همسایگی دلخواه مثلاً 2 در نظر گرفت: $3<x<7$

$$3<x<7 \Rightarrow 1<x-2<5 \Rightarrow |x-2|<5 \Rightarrow \frac{|x-5|}{|x-2|}<\varepsilon \Rightarrow |x-5|<5\varepsilon$$

$$\delta=\min\{2,5\varepsilon\}$$

❖ نقاطی را، درصورت وجود، بیابید که تابع داده‌شده در آنها ناپیوسته است.

14) $(x-1)^2$

حل: $f(x)=x^2-2x+1$ تابع در تمام نقاط پیوسته است

15) $101x^{11}-1001x$

حل: $f(x)=101x^{11}-1001x$ تابع در تمام نقاط پیوسته است

16) $\dfrac{x^2}{x^2-49}$

حل: تابع در نقاط ±7 ناپیوسته است $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-49}$ $\quad x^2-49=0 \Rightarrow x=\pm7$

17) $\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$

حل: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$

$x^2+x+1=0 \Rightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow$ تابع در تمامی نقاط پیوسته است

18) $\dfrac{1}{2x^2+x-1}$

حل: $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-1} \Rightarrow$ تابع در نقاط $\dfrac{1}{2}$ و -1 ناپیوسته است

$$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ x=-1$$

19) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

حل: تابع در نقاط ±2 ناپیوسته است

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4} \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm2$$

$$20)\ \frac{3x-5}{x^2-3x+2}$$

حل:

$$f(x)=\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=1, x=2$$

تابع در نقاط 1 و 2 ناپیوسته است

$$21)\ \frac{x^2-x+1}{x^3-6x^2+11x-6}$$

حل:

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^3-6x^2+11x-6}$$

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

تابع در نقاط 1 و 2 و 3 ناپیوسته است

$$22)\ \frac{x^3+10}{x^5-2x^3+x}$$

حل:

$$f(x)=\frac{x^3+10}{x^5-2x^3+x}$$

$$x^5-2x^3+x=0 \Rightarrow x\left(x^4-2x^2+1\right)=0 \Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

تابع در نقاط 0 و ±1 ناپیوسته است

❖ **حدود زیر را محاسبه کنید.**

$$23)\ \lim_{x\to 1}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 1}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\lim_{x\to 1}(\cos 2x)=\cos 2\approx -0.42$$

$$24)\ \lim_{x\to -1}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -1}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\lim_{x\to -1} 1=1$$

$$25)\ \lim_{x\to \pi}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to \pi}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)=(\cos\pi)^3+(\sin\pi)^3=(-1)^3+0=-1$$

$$26)\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4 x-\sin^5 x\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4 x-\sin^5 x\right)=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^4-\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^5=0-(-1)^5=1$$

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\sin x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=1\times 0=0$$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1$$

29) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

حل:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1+\tan^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sec^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos^2 x$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$$

30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2\sec^4 x-1\right)$

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2\sec^4 x-1\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{\cos^4 x}-1\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\cos^4 x}-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}1=\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}-1=\frac{2}{\frac{1}{4}}-1=7$$

31) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cot x+\csc x)$

حل:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x+1}{\sin x}\right)=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$$

❖ حدود زیر را محاسبه نمائید.

$1)\lim_{x\to0}\sin(\cos x)$

حل: $L=\lim_{x\to0}\sin(\cos x)=\sin(\cos(0))=\sin 1$

$2)\lim_{x\to0}\cos(\sin x)\cos x$

حل: $L=\lim_{x\to0}\cos(\sin x)\cos x=\lim_{x\to0}\cos(\sin x)\cdot\lim_{x\to0}\cos x=\cos(0)\cdot\cos(0)=1\times1=1$

$3)\lim_{x\to0}\sin(\cos x)\cdot\sin x$

حل: $L=\lim_{x\to0}\sin(\cos x)\sin x=\lim_{x\to0}\sin(\cos x)\cdot\lim_{x\to0}\sin x=\sin(\cos(0))\sin(0)=\sin(1)\cdot\sin(0)=0$

$4)\lim_{x\to0}\cos(\sin x)\cos x$

حل: $L=\lim_{x\to0}\cos(\sin x)\cos x=\lim_{x\to0}\cos(\sin x)\cdot\lim_{x\to0}\cos x=\cos(0)\cdot\cos(0)=1\times1=1$

$5)\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan(\sin x)$

حل: $L=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan(\sin x)=\tan\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\tan\left(\frac{1}{2}\right)$

$6)\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\sin^2(\cos x)$

حل: $L=\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\sin^2(\cos x)=\sin^2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$7)\lim_{x\to0}\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

حل: $L=\lim_{x\to0}\sin\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=\sin(0)=0$

$8)\lim_{x\to-1}\sqrt{\frac{3-x}{8-x}}$

حل: $L=\lim_{x\to-1}\sqrt{\frac{3-x}{8-x}}=\sqrt{\frac{3-(-1)}{8-(-1)}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

$9)\lim_{x\to8}\frac{1+\sqrt{x+1}}{x}$

حل: $L=\lim_{x\to8}\frac{1+\sqrt{x+1}}{x}=\frac{1+\sqrt{8+1}}{8}=\frac{1+3}{8}=\frac{1}{2}$

10) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-3}}$

حل:

$$L=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-3}}=\sqrt{\frac{4+1}{4-3}}=\sqrt{5}$$

11) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-16}{x+2}}$

حل:

$$L=\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x^3-16}{x+2}}=\sqrt[3]{\frac{4^3-16}{4+2}}=\sqrt[3]{\frac{48}{6}}=\sqrt[3]{8}=2$$

12) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[5]{2x^3-3x^2+x+2}$

حل:

$$L=\lim_{x\to 3}\sqrt[5]{2x^3-3x^2+x+2}=\sqrt[5]{2(3)^3-3(3)^2+3+2}=\sqrt[5]{32}=2$$

13) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}$

حل:

$$L=\lim_{x\to -2}\sqrt{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}$$
$$=\sqrt{(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

14) $\lim\limits_{x\to \pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos x+1}$

حل:

$$L=\lim_{x\to \pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos x+1}=\sqrt{(-1)^2-(-1)+1}=\sqrt{3}$$

15) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\tan\sqrt{1+x^2}$

حل:

$$L=\lim_{x\to \sqrt{3}}\tan\sqrt{1+x^2}=\tan\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\tan 2$$

16) $\lim\limits_{x\to -\pi}\sin\sqrt{10+\cos x}$

حل:

$$L=\lim_{x\to -\pi}\sin\sqrt{10+\cos x}=\sin\sqrt{10+(-1)}=\sin 3$$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x}{x}$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x}=\lim_{x\to 0}\pi\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\pi\cdot 1=\pi$$

18) $\lim\limits_{Z\to 0}\dfrac{Z}{\sin\dfrac{Z}{2}}$

حل:

$$L=\lim_{Z\to 0}\frac{Z}{\sin\dfrac{Z}{2}}=\lim_{Z\to 0}2\frac{\dfrac{Z}{2}}{\sin\dfrac{Z}{2}}=2\lim_{Z\to 0}\frac{\dfrac{Z}{2}}{\sin\dfrac{Z}{2}}=2\times 1=2$$

$$19)\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

حل:

$$L=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos\theta}{3-4\sin^2\theta}=\frac{2\cos(0)}{3-4\sin(0)}=\frac{2}{3}$$

$$20)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan 2\alpha}{\alpha}$$

حل:

$$L=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan 2\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\tan 2\alpha}{2\alpha}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan 2\alpha}{2\alpha}=2\times 1=2$$

$$21)\ \lim_{\beta\to 0}\frac{\tan\beta}{\tan 3\beta}$$

حل:

$$L=\lim_{\beta\to 0}\frac{\tan\beta}{\tan 3\beta}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta}}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin\beta\cos 3\beta}{\cos\beta\sin 3\beta}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin\beta\left(4\cos^3\beta-3\cos\beta\right)}{\cos\beta\left(3\sin\beta-4\sin^3\beta\right)}$$

$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{4\cos^2\beta-3}{3-4\sin^2\beta}=\frac{4-3}{3-4(0)}=\frac{1}{3}$$

$$22)\ \lim_{x\to -4}\sqrt[5]{4x^3+x^2-3}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -4}\sqrt[5]{4x^3+x^2-3}=\sqrt[5]{4(-4)^3+(-4)^2-3}=-3$$

$$23)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{4-x^2}{2-x}}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{4-x^2}{2-x}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{(2-x)(2+x)}{2-x}}=\lim_{x\to}\sqrt{(2+x)}=\sqrt{4}=2$$

$$24)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}=\frac{1}{(1+\sqrt{1})(1+1)}=\frac{1}{4}$$

$$25)\ \lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2+4}}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2+4}}=\sqrt[3]{\frac{-2+1}{(-2)^2+4}}=\sqrt[3]{\frac{-1}{8}}=-\frac{1}{2}$$

$$26)\ \lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)}=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\frac{1}{\sqrt[4]{16}+2}=\frac{1}{4}$$

$$27)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{(\sin x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\times1=1$$

$$28)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\cos x)}{\cos x}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\cos x)}{\cos x}=\frac{1-\cos(1)}{\cos(0)}=\frac{1-\cos1}{1}=1-\cos1$$

$$29)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\tan x)}{\tan x}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\tan x)}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\tan x}{2}\right)}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\left(\frac{\tan x}{2}\right)}{\frac{\tan x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{\tan x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\tan x}{2}\right)}{\left(\frac{\tan x}{2}\right)}=0\times1=0$$

$$30)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)}$$

$$\sin(\sin x)=t\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}\sin(\sin x)=\lim_{t\to0}t\quad\Rightarrow\quad L=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$31)\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}-1}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}-1}\times\frac{\sqrt{1+\tan x}+1}{\sqrt{1+\tan x}+1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\left(\sqrt{1+\tan x}+1\right)}{1+\tan x-1}=\lim_{x\to0}\left(\sqrt{1+\tan x}+1\right)=2$$

$$32)\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{\sin^3 x}-\frac{\sin x}{\sin^3 x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

33) $\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}$

حل:

$$L=\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$1-x=t \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to1}(1-x)=\lim_{t\to0}t$$

$$L=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\cos\frac{\pi(1+t)}{2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\sin\frac{\pi t}{2}=\lim_{t\to0}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi t}{2}\right)}=\frac{\pi}{2}$$

34) $\lim_{x\to0}\sin(\cot x)\sin x$

حل:

$$L=\lim_{x\to0}\sin(\cot x)\sin x$$

$\lim_{x\to0}\sin x=0$, تابع $\sin(\cot x)$ ددر همسایگی صفر کراندار است $\Rightarrow \lim_{x\to0}\sin(\cot x)\cdot\sin x=0$

35) ممکن اغوا شده قضیه ۱۱ را این طور تعمیم دهیم هـــرگاه وقتـــی $x\to a$ ، $f(x)\to L$ و وقتی $g(x)\to M, x\to L$ ، آنگاه وقتی $x\to a$ ، $g(f(x))\to M$. بامثال نشان دهیـــد کـــه این حکم نادرست است.

حل: فرض کنید $g(x)=\begin{cases}x & ، \quad x\neq0\\ 1 & ، \quad x=0\end{cases}$ و $(x\neq0)$ $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ و $a=0$ باشد.

$$L=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$M=\lim_{x\to0}g(x)=1$$

$$M=\lim_{x\to0}g(f(x))=0\neq1$$

پس حکم نادرست است

حکم در صورتی درست است که در هماسایگی سفته‌ای از a، $f(x)\neq L$ باشد.

❖ مقادیر زیر را بیابید.

1) $[-\pi]$

حل: $[-\pi]=[-3.14]=-4$

2) $[\pi^2]$

حل: $[\pi^2]=[9.87]=9$

3) $[\sqrt{2}-\sqrt{3}]$

حل: $[\sqrt{2}-\sqrt{3}]=[-0.32]=-1$

4) $[(\frac{2}{3})^4]$

حل: $[(\frac{2}{3})^4]=[\frac{16}{81}]=[0.197]=0$

5) $[(1.1)^{10}]$

حل: $[(1.1)^{10}]=[2.5]=2$

6) $[(-\frac{7}{11})^{13}]$

حل: $[(-\frac{7}{11})^{13}]=[-0.258]=-1$

❖ حد داده شده را (در صورت وجود) بیابید.

7) $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}$

حل: $L=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}$

تابع به ازای $x\geq 1$ تعریف شده است و به ازای $x\to 1^-$ معنی ندارد پس حد ندارد .

8) $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}$

حل: $L=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=\sqrt{1-1}=0$

9) $\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{x-1}$

حل: $L=\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{1-1}=0$

10) $\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1+\frac{4}{2}}$

حل: $L=\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+4}=\sqrt{0+4}=2$

$$11)\ \lim_{x\to 0^-} x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$$

حل: $L=\lim_{x\to 0^-} x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}=\lim_{x\to 0^-} x\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}\sqrt{1-x^2}=(-1)\sqrt{1-0}=-1$

$$12)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{\sqrt{x}}$$

حل: $L=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$

$$13)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{[x]}{x}$$

حل: $L=\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{[1-\varepsilon]}{x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$

$$14)\ \lim_{x\to 1^-}\frac{[x]}{x}$$

حل: $L=\lim_{x\to 1^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{[1-\varepsilon]}{x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{0}{x}=0$

$$15)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}$$

حل: $L=\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{[0+\varepsilon]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=0$

$$16)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}$$

حل: $L=\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{[0-\varepsilon]}{0-\varepsilon}=\frac{-1}{-\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}=\infty$

$$17)\ \lim_{x\to -1^+}\frac{[x]}{x}$$

حل: $L=\lim_{x\to -1^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to -1^+}\frac{[-1+\varepsilon]}{x}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-1}{x}=1$

$$18)\ \lim_{x\to -1^-}\frac{[x]}{x}$$

حل: $L=\lim_{x\to -1^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to -1^-}\frac{[-1-\varepsilon]}{x}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-2}{x}=2$

19) حدود یکطرفه تابع $(x\neq 0)$ $f(x)=\frac{x+x^2}{|x|}$ در $x=0$ را بیابید.

حل: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1+x)=1$

$$\lim_{x\to 0^+}(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^2}{-x}=\lim_{x\to 0^+}(-1-x)=-1$$

20) حدود یکطرفه تابع $f(x)=\begin{cases}x & , \text{ اگر } x<2\\ 1.1x & , \text{ اگر } x\geq 2\end{cases}$ **در** $x=2$ **را بیابید.**

حل:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}x=2$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}1.1x=2.2$$

21) به فرض آنکه $f(x)=\begin{cases}3x & , \text{ اگر } 0\leq x<1\\ 2-x & , \text{ اگر } 1\leq x\leq 2\end{cases}$ **دو بازه با نقاط انتهایی 0 و 1 بیابید که** f **بر آنها پیوسته باشد. نشان دهید که** f **بر هر بازه با نقاط انتهایی 1 و 2 پیوسته است.**

حل: ابتدا بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ را در نظر می گیریم

تابع بر بازهٔ $(0,1)$ پیوسته است زیرا

$$\forall x_0\in(0,1)\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=3x_0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}3x=0=f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}3x=3\neq f(1)=1$$

$\Rightarrow$ در این بازه پیوسته نیست

حال بازه $[0,1)$ را در نظر می گیریم

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}3x=0=f(0)$$

نکته: $f(x)$ در نیمبازهٔ $[a,b)$ پیوسته باشد اگر f بر (a,b) و از راست بر a پیوسته باشد حال بازهٔ $(0,1]$ را در نظر می‌گیریم

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}3x=3\neq f(1)=1$$

پس در این بازه پیوسته نمی باشد پس تابع در بازه های $(0,1)$ و $[0,1)$ پیوسته است

22) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-|x+1| & , \text{ اگر } x<0\\ |x-1| & , \text{ اگر } x>0\end{cases}$ **که در آن** $f(0)$ **تعریف نشده است.** $f(0)$ **چگونه تعریف شود که** f **از راست در** $x=0$ **پیوسته شود؟ از چپ در** $x=0$ **پیوسته شود؟**

حل: وقتی f از راست در $x=0$ پیوسته شود

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0^+}|x-1|=1\quad\Rightarrow\quad f(0)=1$$

وقتی f از چپ در $x=0$ پیوسته شود

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0^-}-|x+1|=-1\quad\Rightarrow\quad f(0)=-1$$

❖ حدود زیر را محاسبه کنید.

51) $l=\lim\limits_{x\to 1}(x^{100}+x^{50}+1)$

حل: $l=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{100}+x^{50}+1\right)=(1)^{100}+(1)^{50}+1=3$

52) $\lim\limits_{x\to -1}(x^{99}+x^{49}+1)$

حل: $l=\lim\limits_{x\to -1}(x^{99}+x^{49}+1)=(-1)^{99}+(-1)^{49}+1=-1$

53) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x+12}{x^4-3x+4}$

حل: $l=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x+12}{x^4-3x+4}=\dfrac{(-4)^3+4(-4)+12}{(-4)^4-3(-4)+4}=\dfrac{-68}{272}=-\dfrac{1}{4}$

54) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+10x-39}{x-3}}$

حل: $l=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+10x-39}{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{(x+13)(x-3)}{(x-3)}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{(x+13)}=4$

55) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)^{10}}{(x^2-2x+1)^5}$

حل: $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1\right)^{10}}{\left(x^2-2x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1\right)^{10}}{\left[(x-1)^2\right]^5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}{(x-1)^{10}}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)^{10}=2^{10}=1024$

56) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

حل: $l=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{\left(x^2+2x-8\right)^{10}(x-2)^{10}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^{10}(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}(x-2)^{10}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}=\dfrac{3^{20}}{6^{10}}=\dfrac{3^{10}\times 3^{10}}{2^{10}\times 3^{10}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

57) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

حل: $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x-2)(x-1)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x^2+2x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{1}{2}$

58) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$

$$l=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}$$

$$=\frac{1-1-1}{1+1+1+1-1}=\frac{-1}{3}$$

59) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

$$l=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-(\sqrt[6]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x})}{(1-\sqrt[6]{x})(1+\sqrt[6]{x})}$$

$$l=\lim\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\frac{1-(\sqrt[6]{x})^3}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\frac{(1-\sqrt[6]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x})}{(1-\sqrt[6]{x})(1+\sqrt[6]{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}=\frac{3}{2}$$

60) $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m,n اعداد صحیح مثبت)

$$l=\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\mathrm{K}+1\right)}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\mathrm{K}\right)}=\frac{m}{n}$$

61) **نشان دهید هرگاه توابع f و g همه‌جا پیوسته باشند، آنگاه توابع**

$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ و $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ نیز چنین‌اند. (شکلهای ۵۷(ب) ۵۷(پ) $M(x)$ و $m(x)$ توابع f و g شکل ۵۷(آ) را نشان می‌دهند.)

حل:

$$m(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$M(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

چون f و g پیوسته هستند پس حاصل جمع و تفاضل دو تابع با هم نیز پیوسته است پس $M(x)$ و $m(x)$ نیز پیوسته هستند.

62) **با استفاده از مسئله قبل نشان دهید هرگاه تابع f همه‌جا پیوسته باشد، آنگاه تابع "سنجاق شده"**

$$\begin{cases} c & , f(x)>c \quad \text{اگر} \\ \ldots \end{cases}$$